Ein komplexeres Beispiel, welches „verschiedenene Typen“ der Unendlichkeit illustriert, ist bekannt unter dem Namen **Hilberts Hotel**.[8]

In einem Hotel mit endlich vielen Zimmern können bekanntlich keine Gäste mehr aufgenommen werden, sobald alle Zimmer belegt sind. Stellen wir uns nun ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern vor, durchnummeriert, beginnend bei 1 und mit nur einem möglichen Gast pro Zimmer. Man könnte annehmen, dass dasselbe Problem auch hier auftritt. Die naive Vermutung hierzu wäre: Wenn unendlich viele Gäste im Hotel sind, kann kein weiterer Gast aufgenommen werden. Sehen wir uns einmal an, welche Erlebnisse eine Arbeitswoche in Hilberts Hotel bereithält:

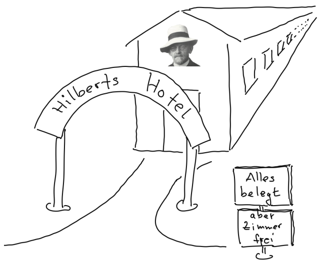

Abb. 21 *Hilberts Hotel*

Montag: Alle Zimmer sind belegt und ein neuer Gast reist an.
Der Hoteldirektor bittet den Gast im Zimmer 1 nach Zimmer 2 umzuziehen, den Gast im Zimmer 2 nach Zimmer 3 umzuziehen, usw. Auf diese Weise ziehen alle „alten“ Gäste in das Zimmer mit der nächsthöheren Zimmernummer um. Dadurch wird Zimmer 1 frei und der neue Gast kann einziehen. Mathematisch steckt folgende injektive und nicht surjektive „Umzieh-Abbildung“ hinter diesem Prinzip:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1.$$

Die Injektivität stellt dabei sicher, dass niemals zwei Gäste in einem Zimmer einquartiert werden. Andererseits ist f nicht surjektiv, denn offenbar wird $1 \in \mathbb{N}$ nicht als Bild von f angenommen, d.h. es gilt

$$f(\mathbb{N}) = \{f(n) \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, \ldots\},$$

also $1 \notin f(\mathbb{N})$. Das heißt gerade, dass Zimmer 1 für den neuen Gast frei geworden ist.

Dienstag: Alle Zimmer sind belegt und ein Bus mit k neuen Gästen trifft ein ($k \in \mathbb{N}$).
Wieder hat der clevere Hoteldirektor eine Lösung parat: Jeder „alte“ Gast zieht in das Zimmer, dessen Nummer um k größer ist als das bisherige. Dadurch werden die Zimmer $1, \ldots, k$ frei. Diesmal liegt die injektive aber nicht surjektive Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + k,$$

zu Grunde, für die

$$f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, k\} = \{k + 1, k + 2, \ldots\}$$

gilt. Daher ist $\{1, \ldots, k\} \cap f(\mathbb{N}) = \emptyset$, die ersten k Zimmer sind für die neuen Gäste frei geworden.

[8] benannt nach dem deutschen Mathematiker David Hilbert (1862–1943), siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert`